①

ゲームで楽しむ，フラクタルとカオス

玉城 政和 (三重大学教育学部)

1．フラクタルゲーム

1.1. あそびかた　正三角形ＸＹＺの内部に取った点を，次のルールで動かしていきます．

ルール

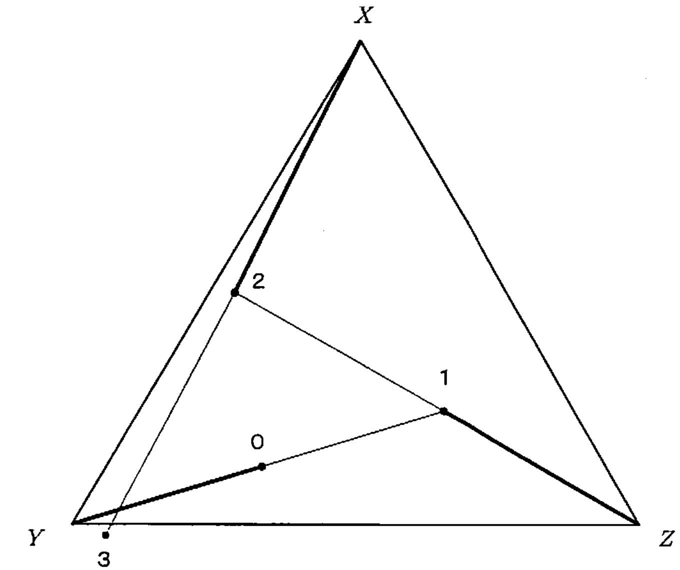
① はじめは正三角形の内部ならどこでも，好きな場所に点を取ることができる．

② この点について，一番近い三角形の頂点 (以下これを軸とよびます) を決める．
もし同じ距離に複数個の頂点があるときは，好きな方を選んでください．

③ 軸と点を結ぶ直線上に，距離が２倍となる点を取り，この点に移動する．

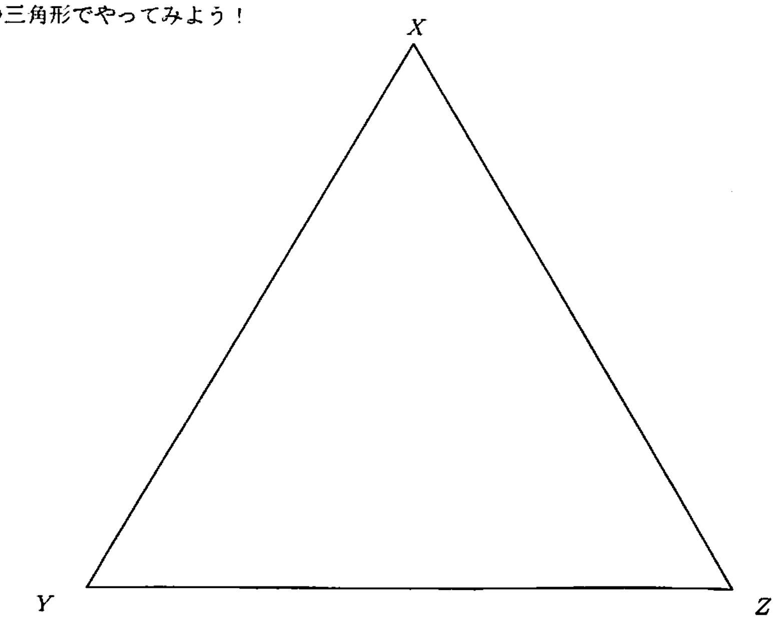
④ 移った点が三角形の外に出れば，そこでゲームオーバーとする．
もし内部なら，移った点に対して ② ～ ④ を繰り返します．

例)



次の三角形でやってみよう！

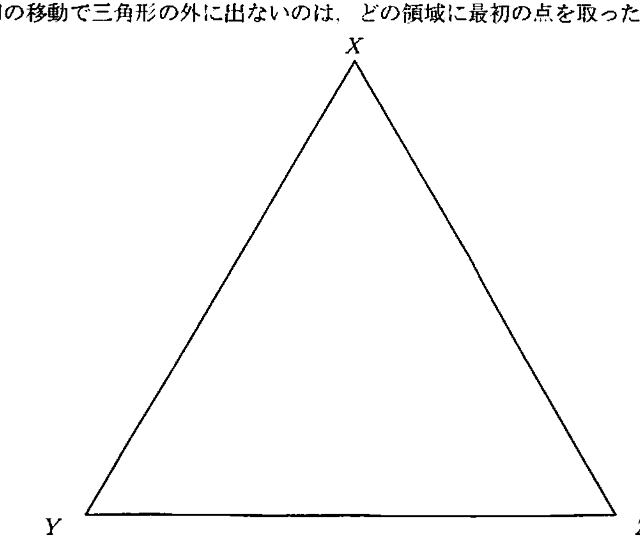
②



1.2 高得点をあげるには

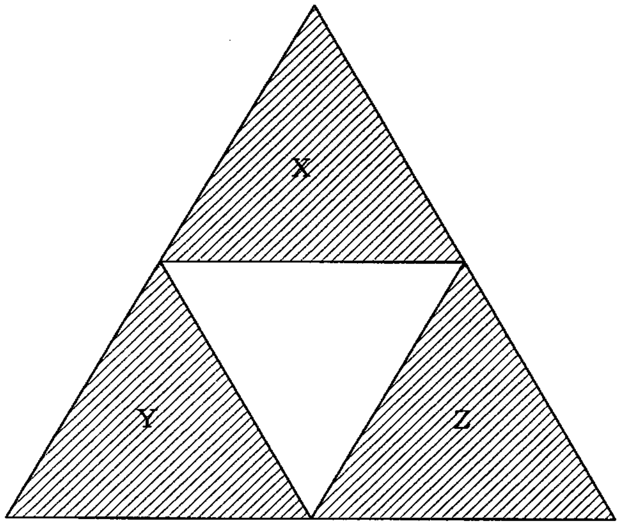
③

問１） 最初の移動で三角形の外に出ないのは，どの領域に最初の点を取ったときですか？

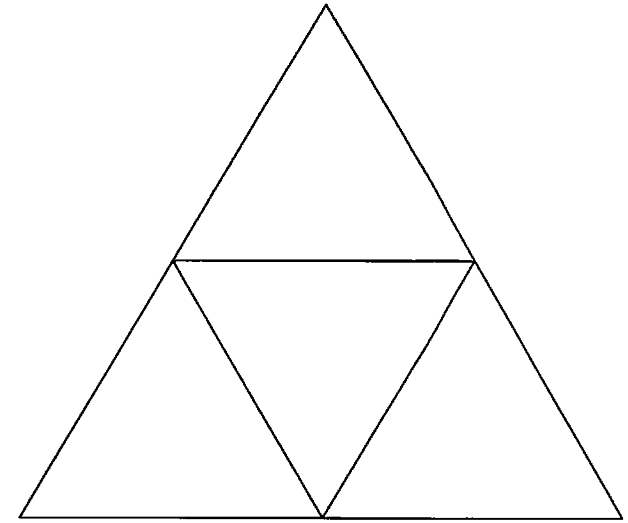


ヒント：まず，頂点 X が軸になる場合に，三角形の外に出ないのはどの部分か考えよう．

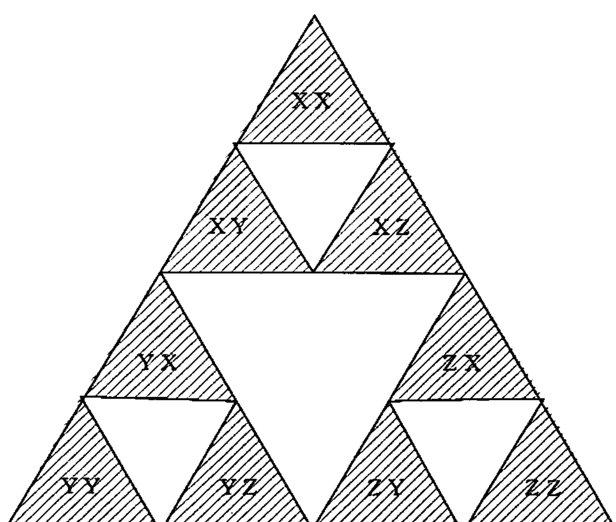
答え）



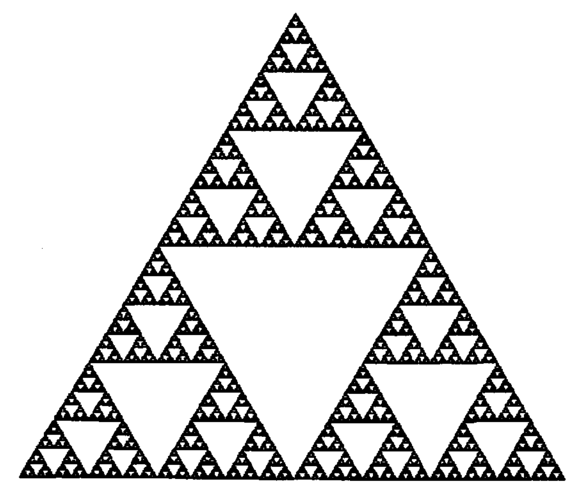
問2）　2回目の移動でも三角形の外に出ないのは，どの領域ですか？　④



答え）



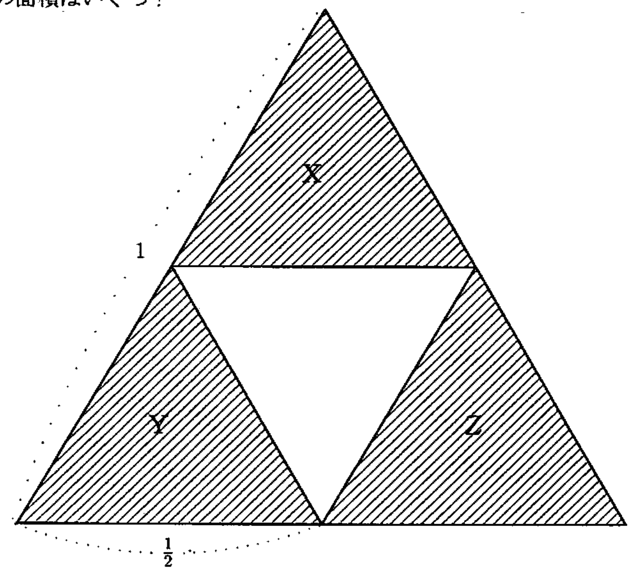
繰り返すと …



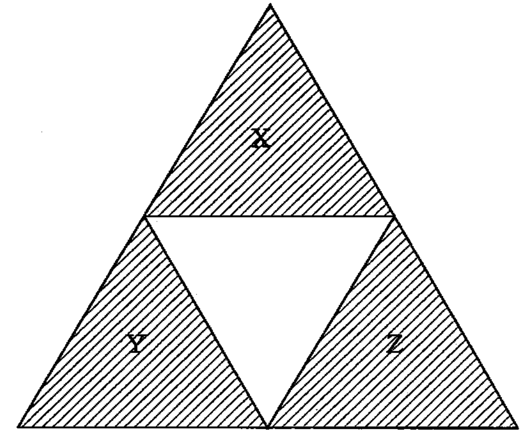
：シェルピンスキーガスケット (SG) のできあがり

1.3 シェルピンスキーガスケットの面積を求めてみよう

問３） 斜線部の面積はいくつ？



答え）



大きな正三角形の面積は

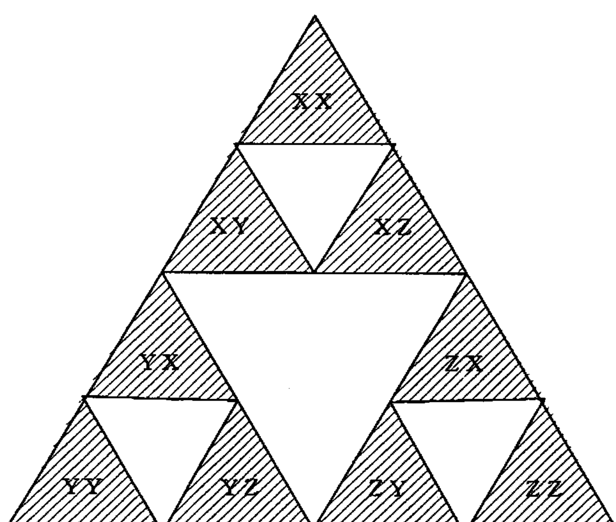
底辺 × 高さ ÷ 2

$$= 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \div 2 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

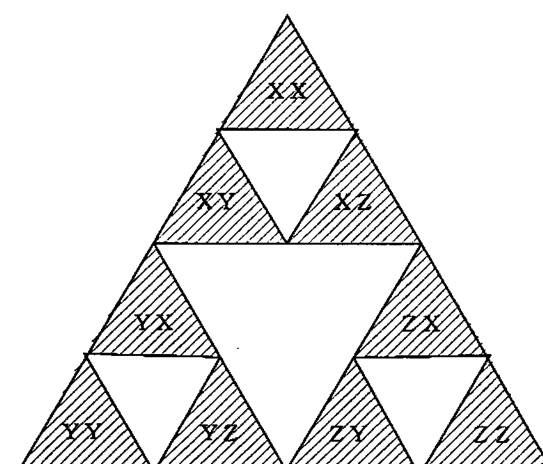
小さな正三角形の面積はその $\frac{1}{4}$ なので，足し合わせると

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{4} \times 3.$$

問４） それでは，次の斜線部の面積は？



答え）



小さな正三角形の面積は大きな正三角形の面積の $\frac{1}{4^2}$ なので，足し合わせると

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{4^2} \times 3^2.$$

n ステップ目にできる小さな正三角形の面積を足し合わせると

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{4^n} \times 3^n = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

よって

$$\text{SG の面積} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

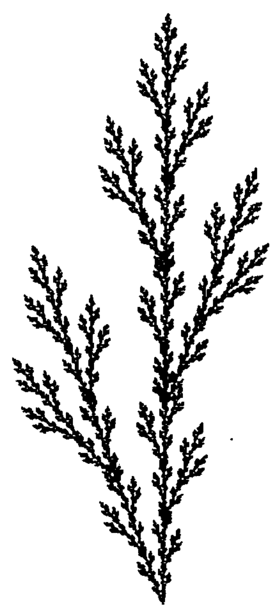
であり，三角形の内部に任意に点を選ぶと，ほとんど確実に SG の外側にある．

従って，いつか確実に正三角形の外部に出て，ゲームオーバーとなる．

n	面　積
1	0.324759526419164 ···
2	0.243569644814373 ···
3	0.182677233610780 ···
4	0.137007925208085 ···
5	0.102755943906064 ···
10	0.024384467157396 ···
20	0.001373175049950 ···
50	0.000000245224470 ···
75	0.000000000184542 ···
100	0.000000000000138 ···

コンピューターで描いた雲

コンピューターで描いた樹：



2．カオスゲーム

⑥

2.1 ルール　平面上に 3 点 X, Y, Z を固定し，同一平面上に取った点 P を，与えられた数

$$a.\underline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \cdots}$$

の小数部分によって，次のルールで，順次，動かしていく．

ルール

① $a_k = 1, 4, 7$ のときは，X と P の中点に移動する．

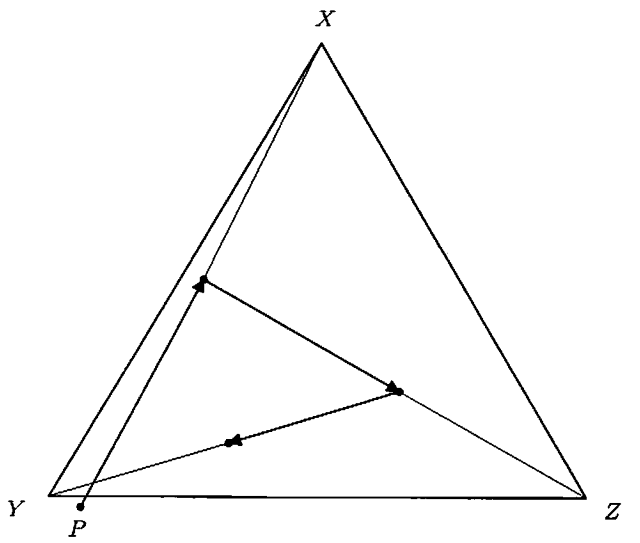
② $a_k = 2, 5, 8$ のときは，Y と P の中点に移動する．

③ $a_k = 0, 3, 6, 9$ のときは，Z と P の中点に移動する．

このときの，点 P の軌跡を考える．

[注意]　① ⟹ 3 で割って 1 余る，② ⟹ 3 で割って 2 余る，③ ⟹ 3 で割り切れる，場合．

例） 1.735 ⋯ = ①③② ⋯ に対しては



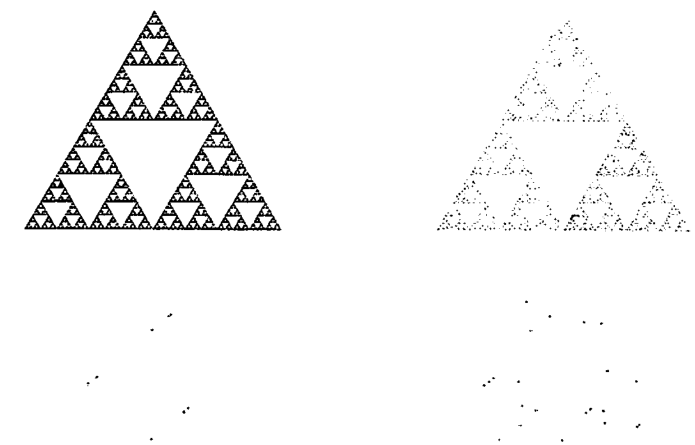
問 5） 下の 4 つの図形はそれぞれ，

⑦

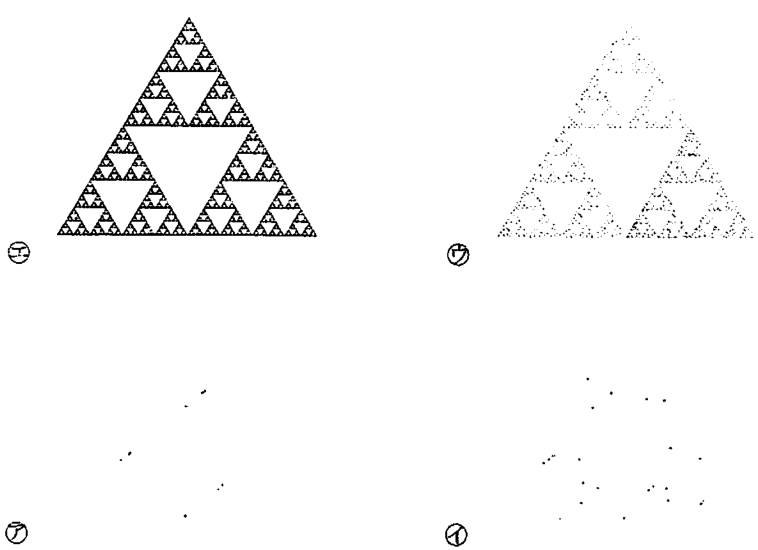
㋐ 0.12012012012 ⋯ (10 万桁まで)　　㋑ 2.10201120102021012 ⋯ (10 万桁まで)

㋒ $\sqrt{2} = 1.414213 \cdots$ (1 万桁まで)　　㋓ $\pi = 3.14159265358 \cdots$ (10 万桁まで)

に基づいて描いたものです．どれが対応しているでしょう．



答え）



2.2 なぜ SG が？

⑧

(理由 1)　3 つの変換①〜③は，フラクタルゲームの，ちょうど逆の変換をする．

(理由 2)　π や $\sqrt{2}$ といった無理数では，0 から 9 までの数が不規則に偏らないで現れる．

⟹ カオスの効果をうむ

カオス = • 混沌 (渾沌)，物事の区別・なりゆきのはっきりしないさま)

• 時間とともに秩序から生じる不規則な運動

[補 足] — 次元について

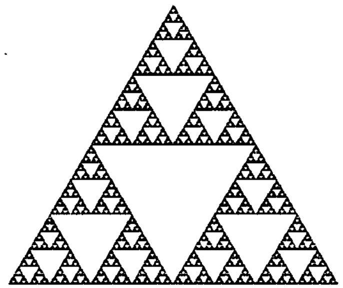
- SG の面積 $= 0 \implies$ 大きさを面積で測る ×
- 相似次元で大きさを数量化する.

全体が k 個の, 全体を $r(<1)$ 倍 (辺の長さ) した部分からできている

$$\implies \dim = \frac{\log k}{-\log r}$$

- SG は, $k = 3$, $r = \frac{1}{2}$

$$\dim(SG) = \frac{\log 3}{-\log \frac{1}{2}} = 1.5849625\cdots$$



2.3 いろいろな作品